



Università degli Studi di Palermo

Elaborazione delle Immagini Digitali

Parte I

Prof. Edoardo Ardizzone

A.A. 2001-2002



La trasformata di Hotelling o di Karhunen-Loeve (KLT) discreta

- ✓ Questa trasformata, detta anche *analisi delle componenti principali* (PCA) o degli *autovettori*, si basa su proprietà statistiche delle rappresentazioni vettoriali. La sua importanza per l'immagine processing sta nel fatto che essa è la trasformazione **ottima** dal punto di vista della **decorrelazione dei dati**
- ✓ Dato un vettore \mathbf{x}_s a n componenti, l'insieme $\{\mathbf{x}_s \mid s \in I\}$, dove I è l'insieme dei valori possibili come indici dei vettori, può essere rappresentato da una **popolazione di vettori random** della forma:

$$\mathbf{x} = \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{bmatrix}$$

Ciascuna delle componenti x_i è una variabile random

- ✓ Il **vettore medio** della popolazione è:

$$\mathbf{m}_x = E\{\mathbf{x}\} = (m_1, m_2, \dots, m_n)^T$$



La trasformata di Hotelling o di Karhunen-Loeve (KLT) discreta

- ✓ $E\{\}$ è l'operatore statistico di **expectation**. \mathbf{m}_x è dunque un vettore a n componenti, ciascuna delle quali è:

$$m_i = E\{x_i\} \quad i = 1, \dots, n$$

- ✓ La **matrice di covarianza** della popolazione di vettori è:

$$\mathbf{C}_x = E\{(\mathbf{x} - \mathbf{m}_x)(\mathbf{x} - \mathbf{m}_x)^T\}$$

- ✓ Poichè \mathbf{x} e \mathbf{m}_x sono vettori di dimensione n , \mathbf{C}_x è una matrice di dimensione $n \times n$
- ✓ L'elemento c_{ii} di \mathbf{C}_x è la **varianza** della i -sima componente x_i dei vettori della popolazione, mentre l'elemento c_{ij} è la **covarianza** tra le componenti x_i e x_j dei vettori stessi



La trasformata di Hotelling o di Karhunen-Loeve (KLT) discreta

- ✓ La matrice \mathbf{C}_x è **reale** (per la natura delle variabili random componenti dei vettori della popolazione) e **simmetrica**, in quanto la covarianza di x_i e x_j è uguale alla covarianza di x_j e x_i
- ✓ Se x_i e x_j sono **incorrelati**, la loro covarianza è nulla, e $c_{ij} = c_{ji} = 0$
- ✓ Dal punto di vista implementativo, utilizzando un set di M campioni della popolazione di vettori, il vettore medio e la matrice di covarianza possono essere così approssimati:

$$\mathbf{m}_x = \frac{1}{M} \sum_{k=1}^M \mathbf{x}_k \quad \mathbf{C}_x = \frac{1}{M} \sum_{k=1}^M \mathbf{x}_k \mathbf{x}_k^T - \mathbf{m}_x \mathbf{m}_x^T$$



La trasformata di Hotelling o di Karhunen-Loeve (KLT) discreta

- ✓ A titolo di esempio, considerando i 4 vettori

$$\mathbf{x}_1 = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} \quad \mathbf{x}_2 = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} \quad \mathbf{x}_3 = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix} \quad \mathbf{x}_4 = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}$$

- ✓ si ottiene:

$$\mathbf{m}_x = \frac{1}{4} \begin{bmatrix} 3 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix} \quad \mathbf{C}_x = \frac{1}{16} \begin{bmatrix} 3 & 1 & 1 \\ 1 & 3 & -1 \\ 1 & -1 & 3 \end{bmatrix}$$

- ✓ Si può notare che le tre componenti dei vettori hanno la stessa varianza (gli elementi della diagonale principale di \mathbf{C}_x sono uguali), e che tra le componenti x_1 e x_2 (x_1 e x_3) la correlazione è positiva, mentre tra le componenti x_2 e x_3 la correlazione è negativa.



La trasformata di Hotelling o di Karhunen-Loeve (KLT) discreta

- ✓ Dato che \mathbf{C}_x è reale e simmetrica, dall'algebra lineare sappiamo che è sempre possibile trovare un insieme di n **autovettori ortonormali** \mathbf{e}_i ($i = 1, 2, \dots, n$), ai quali corrispondono altrettanti **autovalori** λ_i
- ✓ Per definizione, data una matrice \mathbf{C} di dimensione $n \times n$, gli autovettori e gli autovalori soddisfano la relazione $\mathbf{C}\mathbf{e}_i = \lambda_i\mathbf{e}_i$ ($i = 1, 2, \dots, n$)
- ✓ Si consideri la matrice \mathbf{A} , anch'essa di ordine $n \times n$, avente come righe gli autovettori \mathbf{e}_i , presi nell'ordine **decrescente** dei corrispondenti autovalori λ_i :

$$\mathbf{A} = (\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2, \dots, \mathbf{e}_n)^T$$

- ✓ Utilizzando \mathbf{A} come una matrice di mapping, la **trasformata di Hotelling** è definita dalla equazione:

$$\mathbf{y} = \mathbf{A}(\mathbf{x} - \mathbf{m}_x)$$

- ✓ La popolazione costituita dai vettori ottenuti da questa trasformazione gode delle seguenti proprietà:



La trasformata di Hotelling o di Karhunen-Loeve (KLT) discreta

- 1 Il vettore medio è nullo:

$$\mathbf{m}_y = \mathbf{0}$$

- 2 La matrice di covarianza è:

$$\mathbf{C}_y = \mathbf{A}\mathbf{C}_x\mathbf{A}^T$$

- 3 \mathbf{C}_y è una **matrice diagonale** i cui elementi non nulli sono gli autovalori di \mathbf{C}_x :

$$\mathbf{C}_y = \begin{bmatrix} \lambda_1 & & 0 \\ & \ddots & \\ 0 & & \lambda_n \end{bmatrix}$$

- ✓ Quindi le componenti dei vettori \mathbf{y} sono **incorrelate** (la covarianza tra le componenti y_i e y_j è nulla), mentre le loro varianze coincidono con gli autovalori λ_i
- ✓ Inoltre, dato che gli elementi non nulli di una matrice diagonale sono anche i suoi autovalori, \mathbf{C}_x e \mathbf{C}_y hanno gli stessi autovalori. Lo stesso avviene per gli autovettori



La trasformata di Hotelling o di Karhunen-Loeve (KLT) discreta

- ✓ La **trasformata inversa di Hotelling** è definita come:

$$\mathbf{x} = \mathbf{A}^{-1} \mathbf{y} + \mathbf{m}_x$$

- ✓ Poichè $\mathbf{A}^{-1} = \mathbf{A}^T$ (infatti le righe di \mathbf{A} sono vettori ortonormali), la ricostruzione di ogni vettore \mathbf{x} a partire dal corrispondente \mathbf{y} è **sempre** possibile:

$$\mathbf{x} = \mathbf{A}^T \mathbf{y} + \mathbf{m}_x$$

Interpretazione statistica

- ✓ Se invece di considerare tutti gli autovettori di \mathbf{C}_x nella costruzione della matrice di trasformazione \mathbf{A} se ne usano solo K , si ottiene la matrice di trasformazione \mathbf{A}_K , di ordine $K \times n$, che dà luogo a vettori \mathbf{Y} a K componenti:

$$\mathbf{Y} = \mathbf{A}_K (\mathbf{x} - \mathbf{m}_x)$$

$K \times 1$ $K \times n$ $n \times 1$



La trasformata di Hotelling o di Karhunen-Loeve (KLT) discreta

- ✓ La ricostruzione dei vettori \mathbf{x} non è più esatta, ma solo approssimata:

$$n \times 1 \rightarrow \hat{\mathbf{x}} = \mathbf{A}_K^T \mathbf{Y} + \mathbf{m}_x$$

$n \times K$ $K \times 1$ $n \times 1$

- ✓ Una misura della distorsione introdotta ricostruendo \mathbf{x} in maniera approssimativa è l'**errore quadratico medio** tra \mathbf{x} e $\hat{\mathbf{x}}$. Si può dimostrare che questo **errore di ricostruzione** vale:

$$e_{ms} = \sum_{j=1}^n \lambda_j - \sum_{j=1}^K \lambda_j = \sum_{j=K+1}^n \lambda_j = \sum_{j=K+1}^n \sigma_j$$

avendo indicato con σ_j la varianza della componente j -ma di \mathbf{y}

- ✓ L'errore è nullo (ricostruzione esatta) se $K = n$, cioè se **tutti** gli autovettori sono usati nella trasformazione
- ✓ L'errore è comunque minimizzato scegliendo di fare intervenire nella trasformazione i K autovettori corrispondenti ai K autovalori più grandi



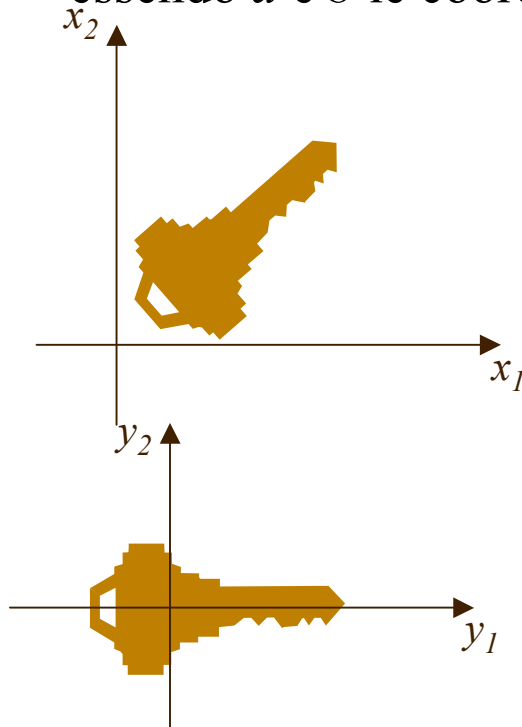
La trasformata di Hotelling o di Karhunen-Loeve (KLT) discreta

- ✓ Inoltre l'errore di ricostruzione è uguale alla somma delle varianze delle componenti dei vettori trascurate nella approssimazione
- ✓ Se quindi il numero K si sceglie in modo che le varianze delle prime K componenti dei vettori costituiscano una percentuale molto rilevante delle varianze complessive, l'errore di ricostruzione può risultare molto contenuto
- ✓ La trasformazione di un set di dati **statisticamente dipendenti** in un altro set di dati **incorrelati**, con la possibilità di scaricare i coefficienti poco significativi, che costituisce la cosiddetta *interpretazione statistica* della trasformata di Hotelling, è in realtà il fondamento teorico delle tecniche di compressione basate su trasformate
- ✓ Da questo punto di vista la trasformata KLT discreta risulta **ottima** in quanto minimizza l'errore di ricostruzione



La trasformata di Hotelling o di Karhunen-Loeve (KLT) discreta

- ✓ Interpretazione geometrica
- ✓ Consideriamo l'immagine binaria mostrata sotto come una popolazione 2-D, ovvero ogni pixel dell'oggetto è trattato come un vettore 2-D $\mathbf{x} = (a, b)^T$, essendo a e b le coordinate del pixel rispetto agli assi x_1 e x_2 :



- ✓ Questi vettori sono utilizzati per calcolare il vettore medio e la matrice di covarianza dei vettori di coordinate
- ✓ Applicando quindi la KLT discreta, l'oggetto risulta riferito ad un nuovo sistema di assi, y_1 e y_2 , che risultano allineati con gli autovettori \mathbf{e}_1 e \mathbf{e}_2 , e la cui origine coincide con il centroide dell'oggetto binario



La trasformata di Hotelling o di Karhunen-Loeve (KLT) discreta

- ✓ Quindi la trasformata di Hotelling può essere vista come una *trasformazione geometrica* che allinea i dati rispetto agli autovettori (**assi principali**): nel nuovo sistema di riferimento le coordinate risultano incorrelate, e le loro varianze sono uguali agli autovalori
- ✓ Nell'esempio, la varianza nella direzione y_1 è maggiore della varianza nella direzione y_2 : se la differenza risultasse molto grande, sarebbe possibile ignorare la componente nella direzione della varianza inferiore, senza sacrificare troppo la qualità dell'immagine \mathbf{x} , una volta ricostruita
- ✓ L'interpretazione geometrica della KLT discreta come analisi dei dati riferiti alle componenti principali trova largo impiego nel pattern recognition e nell'analisi di immagini



La trasformata di Hotelling o di Karhunen-Loeve (KLT) discreta

Vettori di base

- ✓ Si supponga per semplicità $\mathbf{m}_x = \mathbf{0}$. La trasformata diretta e l'inversa diventano in questa ipotesi:

$$\mathbf{y} = \mathbf{A}\mathbf{x} \qquad \mathbf{x} = \mathbf{A}^T \mathbf{y}$$

- ✓ Dato che le righe della matrice \mathbf{A} sono gli autovettori (trasposti) della matrice di covarianza \mathbf{C}_x , si può anche scrivere:

$$\mathbf{x} = \sum_{i=1}^n y_i \mathbf{e}_i$$

- ✓ Quindi \mathbf{x} può essere visto come **combinazione lineare** o **somma pesata** degli n **vettori di base** \mathbf{e}_i
- ✓ I coefficienti della combinazione lineare sono proprio le componenti dei vettori trasformati \mathbf{y} :

$$y_i = (\mathbf{e}_i^T, \mathbf{x}) \quad \leftarrow \text{prodotto interno}$$



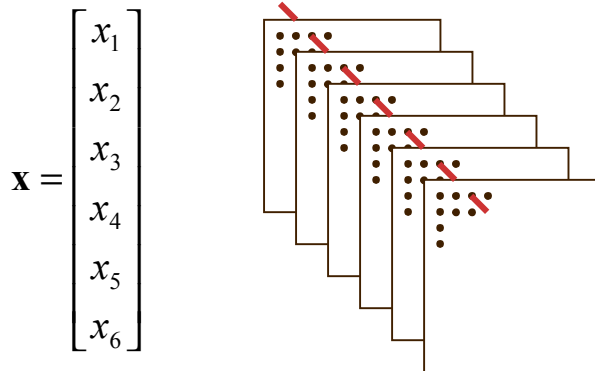
La trasformata di Hotelling o di Karhunen-Loeve (KLT) discreta

- ✓ Il coefficiente y_i può essere interpretato come una misura della correlazione tra il segnale originale \mathbf{x} ed il vettore di base \mathbf{e}_i
- ✓ I coefficienti y_i , con $i = 1, \dots, n$, sono tra loro incorrelati e, per $i > K$, la loro varianza diviene poco significativa, consentendo di trascurare i corrispondenti termini della combinazione lineare, senza introdurre distorsione significativa nel segnale ricostruito
- ✓ Anche le altre **trasformate unitarie** precedentemente studiate godono, sia pure in misura inferiore, delle proprietà più volte evidenziate:
 - decorrelano i dati, nel senso che la correlazione tra i coefficienti della trasformata è minore che tra i valori originali
 - alcuni dei coefficienti della trasformata risultano meno significativi di altri, cosicchè se ne può ipotizzare un trattamento differente dal punto di vista della rappresentazione (per esempio, una quantizzazione più grossolana o addirittura l'eliminazione)



La trasformata di Hotelling o di Karhunen-Loeve (KLT) discreta

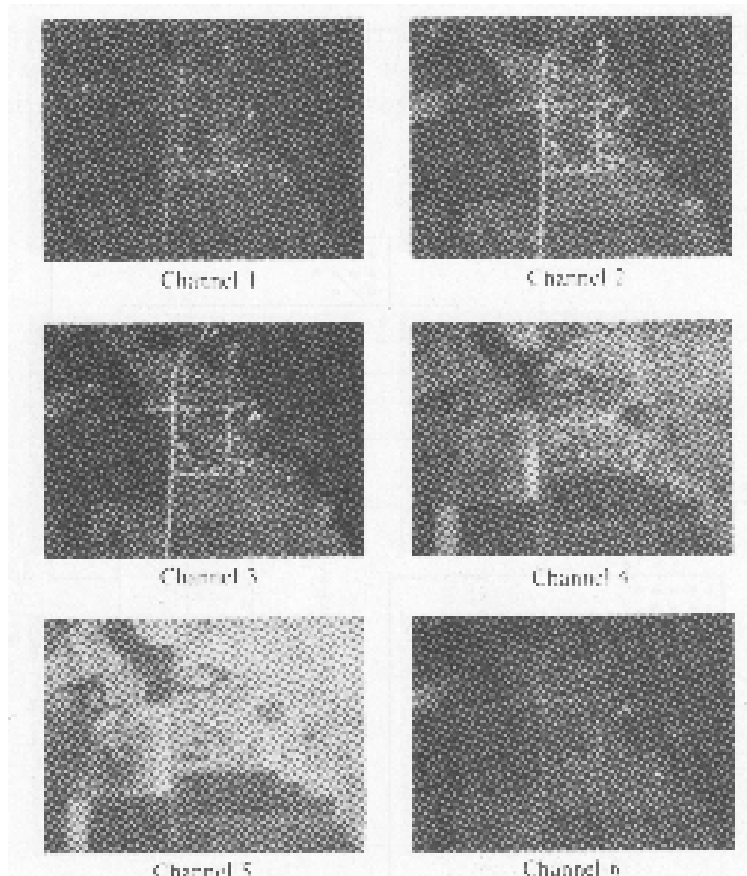
- ✓ Come esempio di applicazione della trasformata di Hotelling consideriamo la compressione di dati da **tele-rilevamento**: in questo caso i dati da trattare sono più immagini della medesima porzione di territorio, riprese in differenti gamme spettrali (**immagini multispettrali**)
- ✓ Le immagini multispettrali sono normalmente abbastanza correlate l'una con l'altra, per cui l'applicazione della KLT discreta è particolarmente appropriata



La procedura che qui viene descritta considera, come popolazione di vettori cui applicare la KLT discreta, quelli ottenuti considerando la disposizione delle immagini illustrata nella figura



La trasformata di Hotelling o di Karhunen-Loeve (KLT) discreta



- ✓ Nell'esempio, si considerano le sei immagini 384 x 239 generate da uno scanner multispettrale a sei bande, operante alle seguenti lunghezze d'onda (μm):

Can. 1	0.40-0.44
Can. 2	0.62-0.66
Can. 3	0.66-0.72
Can. 4	0.80-1.00
Can. 5	1.00-1.40
Can. 6	2.00-2.60
- ✓ Da ogni insieme di pixel di uguale posizione nelle sei immagini si genera un vettore a sei elementi



La trasformata di Hotelling o di Karhunen-Loeve (KLT) discreta

- ✓ La popolazione è quindi costituita da $384 \times 239 = 91776$ vettori a sei elementi ciascuno. Per essa possono essere calcolati sia il vettore medio che la matrice di covarianza, i cui sei autovalori risultano i seguenti:

$$\lambda_1=3210 \quad \lambda_2=931.4 \quad \lambda_3=118.5 \quad \lambda_4=83.88 \quad \lambda_5=64 \quad \lambda_6=13.4$$

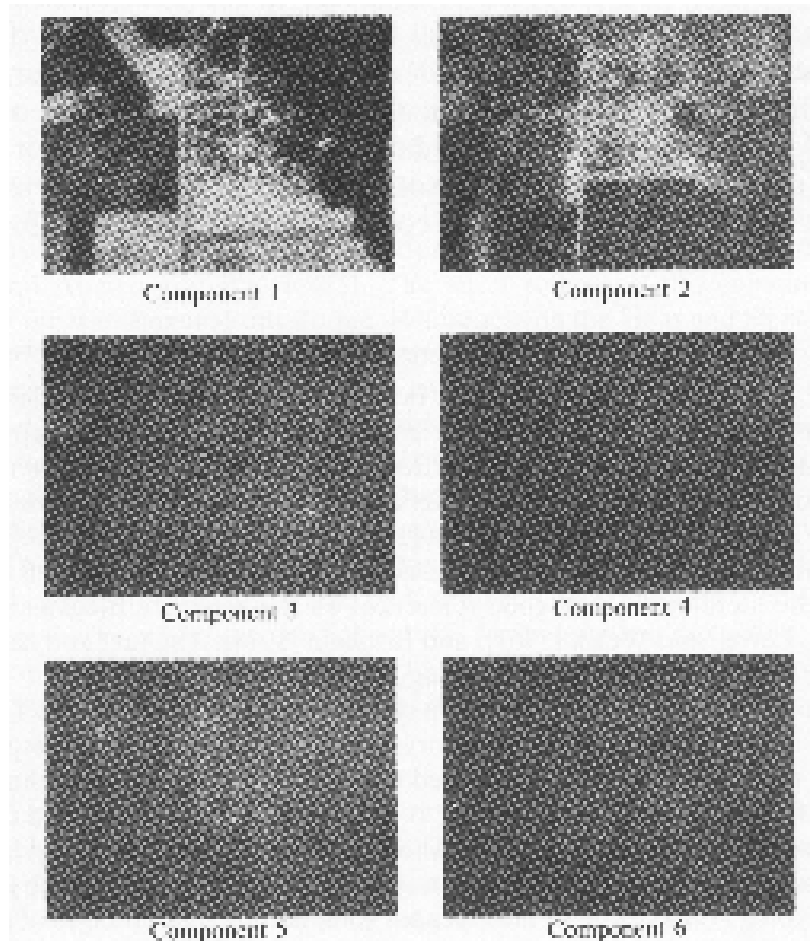
- ✓ Si può notare la forte predominanza dei primi due autovalori
- ✓ Applicando la KLT discreta, si calcolano a questo punto i vettori \mathbf{y} , le cui componenti sono i pesi della combinazione lineare degli autovettori che ricostruisce i vettori \mathbf{x} (a meno del vettore medio):

$$\mathbf{x} - \mathbf{m}_x = \sum_{i=1}^6 y_i \mathbf{e}_i \quad y_i = (\mathbf{e}_i^T, (\mathbf{x} - \mathbf{m}_x))$$

- ✓ Come sappiamo, le varianze delle y_i sono gli autovalori della matrice \mathbf{C}_x
- ✓ Invertendo il procedimento di costruzione dei vettori \mathbf{x} , si possono assemblare sei immagini **componenti principali**: la componente 1 è l'immagine formata da tutti gli elementi y_1 , la componente 2 è l'immagine formata da tutti gli elementi y_2 , etc.



La trasformata di Hotelling o di Karhunen-Loeve (KLT) discreta



- ✓ Per costruzione, l'autovalore λ_1 è la varianza dei livelli di grigio y_1 , per cui la componente 1 è quella con il contrasto più elevato, seguita dalla componente 2
- ✓ Poiché i primi due autovalori danno insieme circa il 94% della varianza complessiva, è abbastanza ovvio come il contrasto delle altre quattro immagini sia così basso
- ✓ Invece di archiviare tutte le sei immagini iniziali si possono quindi conservare solo le **prime due** immagini trasformate, oltre al vettore medio ed ai primi due autovettori, realizzando una **compressione dei dati**



Filtraggio nel dominio della frequenza

- ✓ Come già si è osservato, il fondamento teorico delle tecniche di elaborazione nel dominio della frequenza, basate sulla manipolazione della DFT dell'immagine, è rappresentata dal teorema della convoluzione, che fa corrispondere, alla operazione così definita nel dominio spaziale:

$$g(x, y) = f(x, y) * h(x, y)$$

l'operazione, nel dominio delle frequenze spaziali:

$$G(u, v) = F(u, v)H(u, v)$$

- ✓ Pertanto, data una immagine $f(x,y)$ e calcolata la sua trasformata $F(u,v)$, l'obiettivo di una elaborazione nel dominio della frequenza è scegliere una $H(u,v)$ tale che l'immagine di uscita $g(x,y)$ esibisca le proprietà desiderate, essendo:

$$g(x, y) = F^{-1}\{F(u, v)H(u, v)\}$$



Filtraggio nel dominio della frequenza

- ✓ Per esempio, un filtro di blurring deve ridurre le componenti di alta frequenza spaziale dell'immagine, quindi la sua funzione di trasferimento $H(u,v)$ sarà progettata in modo da attenuare i campioni della $F(u,v)$ in un certo intervallo di frequenze, più o meno lontano dall'origine del piano u,v

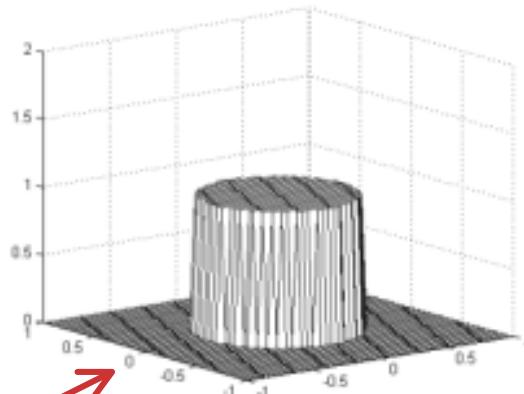
Filtri passa-basso

- ✓ Un **filtro passa-basso ideale** ha la seguente funzione di trasferimento:

$$H(u,v) = \begin{cases} 1 & \text{per } D(u,v) \leq D_0 \\ 0 & \text{per } D(u,v) > D_0 \end{cases}$$

D_0 è una quantità non negativa, e $D(u,v)$ è la distanza del punto (u,v) dall'origine del piano delle frequenze: $D(u,v) = (u^2 + v^2)^{1/2}$

Tutte le frequenze all'interno di un cerchio di raggio D_0 passano senza attenuazione, mentre tutte quelle superiori sono completamente attenuate

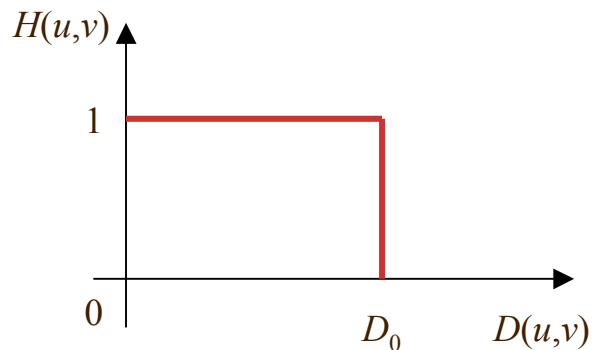


$D_0 = 0.5$



Filtro PB ideale

- ✓ Il filtro è dotato di simmetria circolare rispetto all'origine, per cui il suo comportamento può essere completamente specificato dalla sezione trasversale ottenuta con un piano verticale passante per l'origine



D_0 è la **frequenza di taglio** del filtro

Nella rappresentazione 3-D è più appropriato parlare di un **luogo** di frequenze di taglio, costituito dalla circonferenza, centrata nell'origine, di raggio D_0

- ✓ Un filtro ideale non può essere costruito, ma può essere implementato via software, per cui si può analizzarne l'effetto su una immagine digitale
- ✓ A tal fine, si consideri la risposta del filtro, per diversi valori di D_0 , tali che le corrispondenti circonferenze racchiudano percentuali crescenti della **potenza spettrale totale** dell'immagine, definita come:



Filtro PB ideale

$$P_T = \sum_{u=0}^{N-1} \sum_{v=0}^{N-1} P(u, v) \text{ dove, come è noto: } P(u, v) = |F(u, v)|^2 = \Re^2(u, v) + \Im^2(u, v)$$

- ✓ Riferendo la DFT al centro del piano delle frequenze, un cerchio centrato nell'origine racchiude una frazione β della potenza spettrale totale, espressa (in percentuale) da:

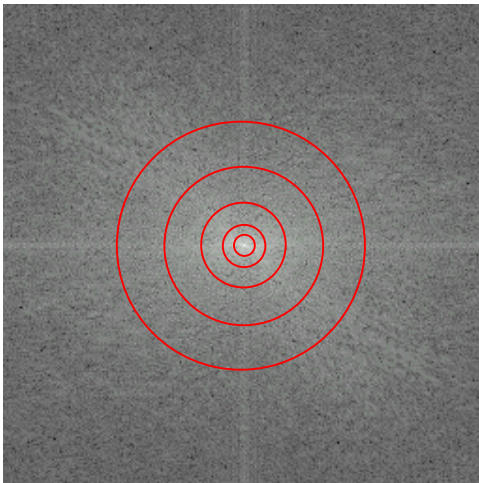
$$\beta = 100 \left[\sum_u \sum_v P(u, v) / P_T \right]$$

dove le somme sono relative ai punti del piano u, v interni al cerchio

- ✓ Si consideri l'immagine seguente, dotata di dettagli di varia dimensione, quindi appropriata per studiare gli effetti di un filtro di blurring, e la sua DFT, entrambe di dimensioni 256 x 256:



Filtro PB ideale



- ✓ La percentuale della potenza spettrale totale racchiusa all'interno di cerchi di raggio R crescente (in pixel) è la seguente:

R	β
6	90
12	95
27	98
45	99
70	99.5

Si può notare che lo spettro ha una intensità decrescente molto rapidamente: il 90% della potenza totale è racchiusa nel piccolo cerchio di raggio 6

Le figure seguenti mostrano i risultati dell'applicazione di filtri PB ideali, con frequenze di taglio uguali ai raggi dei cerchi considerati



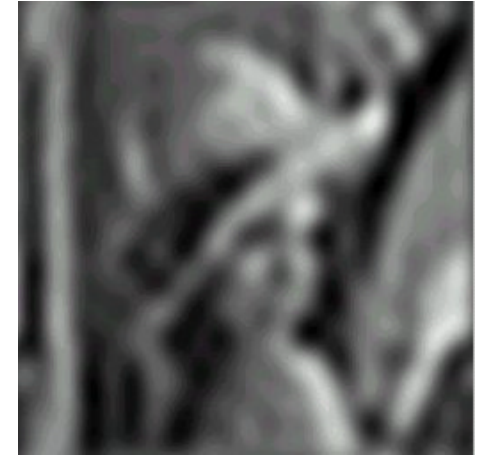
Filtro PB ideale



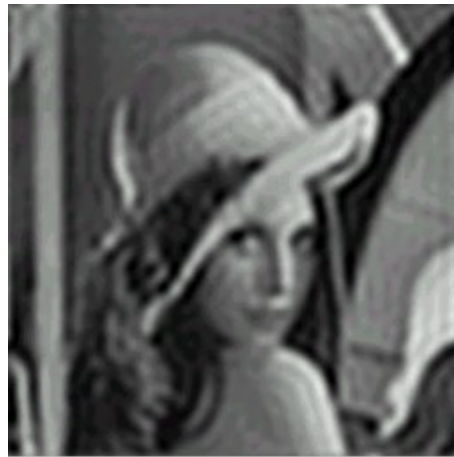
Originale, $\beta=100$



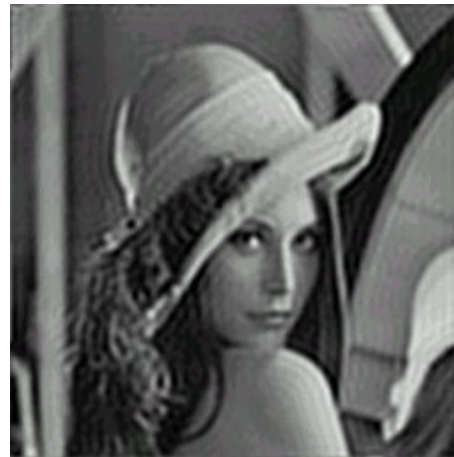
$R=6$, $\beta=90$



$R=12$, $\beta=95$



$R=27$, $\beta=98$



$R=45$ E. Ardizzone $\beta=99$



$R=70$, $\beta=99.5$ 24



Il blurring come processo di convoluzione

- ✓ L'immagine ottenuta trattenendo il 90% della potenza spettrale totale ($R=6$) ha perduto praticamente tutta l'informazione associata ai dettagli, e risulta assolutamente inutilizzabile: per l'immagine in esame, l'informazione più significativa è quella associata al 10% di potenza spettrale perduta
- ✓ Man mano che la potenza trattenuta aumenta, la qualità dell'immagine migliora, in corrispondenza a blurring via via meno accentuato
- ✓ Continua tuttavia a persistere un effetto di *ringing* piuttosto severo, tipico dei filtri ideali
- ✓ Le proprietà di blurring e ringing dei filtri PB ideali possono essere spiegate ricorrendo ancora al teorema della convoluzione:

$$g(x, y) = f(x, y) * h(x, y) \Leftrightarrow G(u, v) = F(u, v)H(u, v)$$

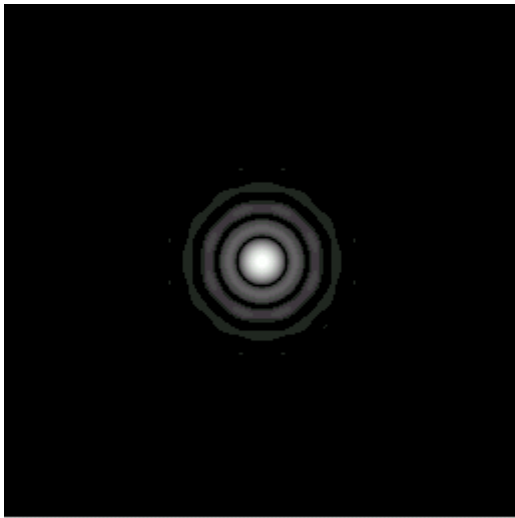


Il blurring come processo di convoluzione

- ✓ Dato che per il filtro PB ideale si ha:

$$H(u, v) = \begin{cases} 1 & \text{per } D(u, v) \leq D_0 \\ 0 & \text{per } D(u, v) > D_0 \end{cases}$$

la corrispondente $h(x, y)$ ha l'andamento qualitativo di figura:



- ✓ Pertanto, se l'immagine $f(x, y)$ fosse costituita da un solo pixel bianco su sfondo nero (approssimazione di un impulso), la risposta del filtro sarebbe proprio quella mostrata
- ✓ Se l'immagine fosse costituita da due punti bianchi su sfondo nero, l'effetto della convoluzione dell'immagine con la $h(x, y)$ sarebbe la replica di quest'ultima nei punti di applicazione degli impulsi



Il blurring come processo di convoluzione

- ✓ Gli anelli generati dalla risposta a ciascuno degli impulsi, di raggio inversamente proporzionale al valore della frequenza di taglio del filtro, tendono ad interferire anche in relazione alla distanza tra i due impulsi
- ✓ Quindi il blurring è tanto più accentuato quanto minore è la frequenza di taglio, mentre al crescere della frequenza di taglio gli anelli diventano via via meno larghi e più finemente distanziati, cosicchè il blurring diminuisce
- ✓ Quando la frequenza di taglio è oltre l'intervallo di definizione della $F(u,v)$, la $h(x,y)$ vale 1 ovunque e la convoluzione si riduce alla $f(x,y)$, che passa inalterata
- ✓ In immagini più complesse, ogni pixel può essere considerato un impulso di intensità proporzionale al valore del pixel, e l'effetto complessivo può essere spiegato ancora con l'applicazione dei concetti illustrati

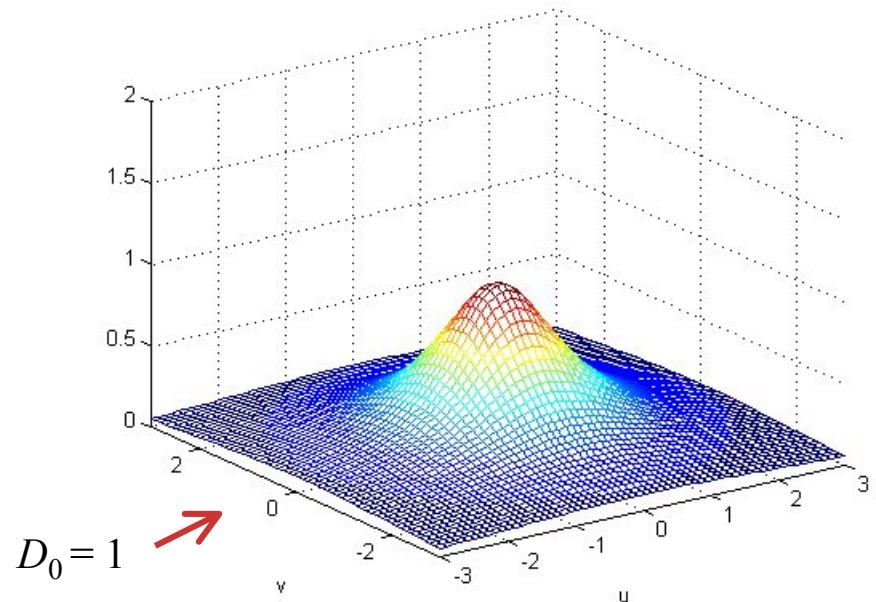
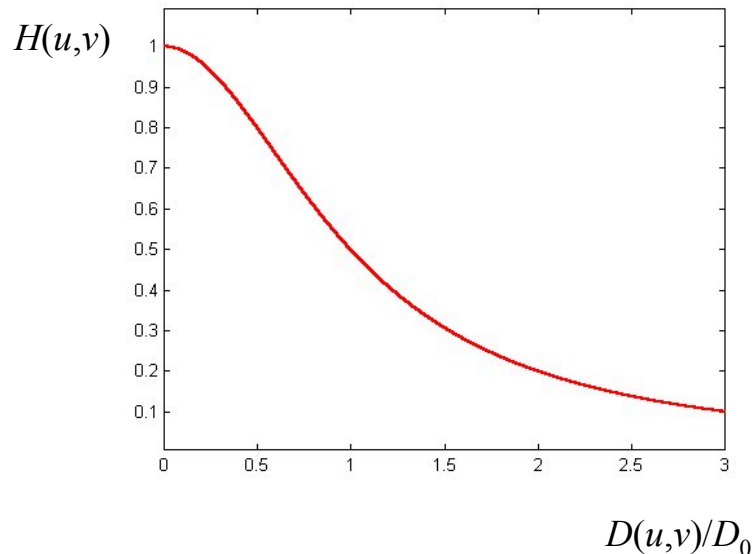


Filtro PB di Butterworth

- ✓ La funzione di trasferimento del **filtro passa-basso di Butterworth** di ordine n e frequenza di taglio D_0 è:

$$H(u, v) = \frac{1}{1 + [D(u, v)/D_0]^{2n}}$$

- ✓ Per esempio, con $n = 1$:





Filtro PB di Butterworth

- ✓ E' evidente che, a differenza del filtro PB ideale, il filtro PB di Butterworth non determina un taglio netto in frequenza, in quanto la sua funzione di trasferimento non esibisce una discontinuità brusca
- ✓ Il luogo delle frequenze di taglio è definito, in casi come questi, nei punti del piano u, v per i quali la $H(u, v)$ decade ad una certa frazione del suo valore massimo
- ✓ Con la definizione adoperata per la $H(u, v)$, per esempio, si ha $H(u, v) = 0.5$ (50% del valore massimo) quando $D(u, v) = D_0$
- ✓ Se invece ci si vuole riferire alla più usuale definizione di frequenza di taglio come quella alla quale la $H(u, v)$ si riduce a $1/\sqrt{2}$ del valore massimo, occorre modificare la $H(u, v)$:

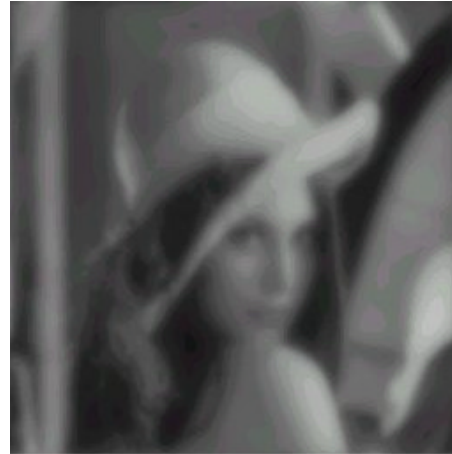
$$H(u, v) = \frac{1}{1 + [\sqrt{2} - 1][D(u, v)/D_0]^{2n}} = \frac{1}{1 + 0.414[D(u, v)/D_0]^{2n}}$$



Filtro PB di Butterworth



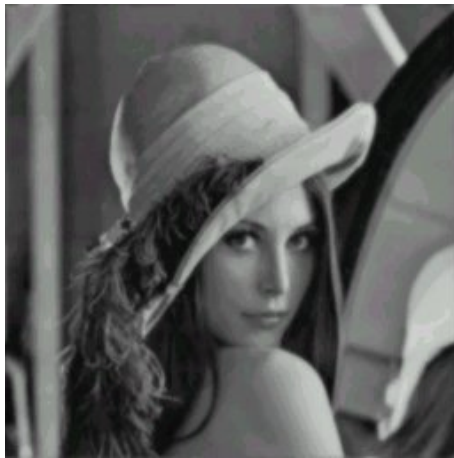
Originale, $\beta=100$



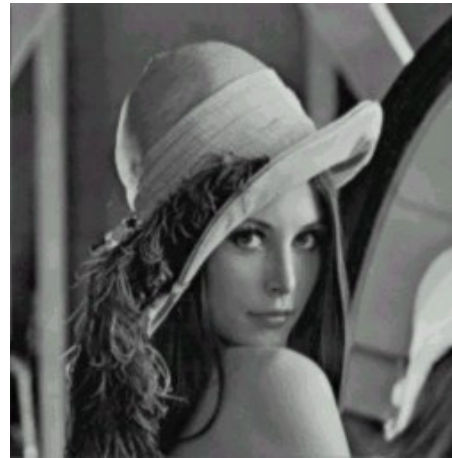
$R=6, \beta=90$



$R=12, \beta=95$



$R=27, \beta=98$



$R=45$ E. Ardizzone $\beta=99$



$R=70, \beta=99.5$ 30



Filtro PB di Butterworth

- ✓ Le immagini precedenti sono il risultato dell'applicazione del filtro PB di Butterworth, con $n=1$ e D_0 crescente, che assume gli stessi valori esaminati per il filtro PB ideale,
- ✓ La transizione meno ripida del filtro in corrispondenza alla frequenza di taglio rende conto del blurring meno accentuato, a parità di D_0
- ✓ Inoltre, per lo stesso motivo, l'effetto di ringing è praticamente scomparso
- ✓ Ai fini pratici, i filtri PB hanno applicazioni simili a quelle dei filtri di smoothing studiati nel dominio spaziale (riduzione di rumore o di altri dettagli spuri, come i falsi contorni), con gli stessi effetti collaterali (riduzione della nitidezza dei dettagli)



Filtro PA ideale

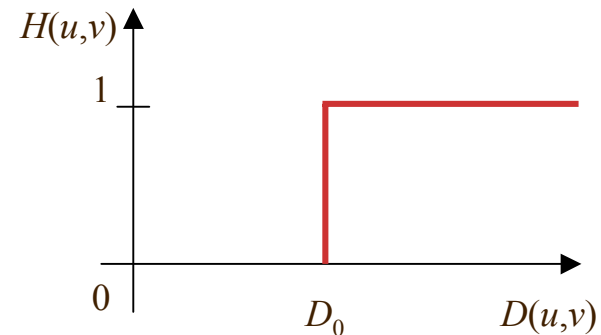
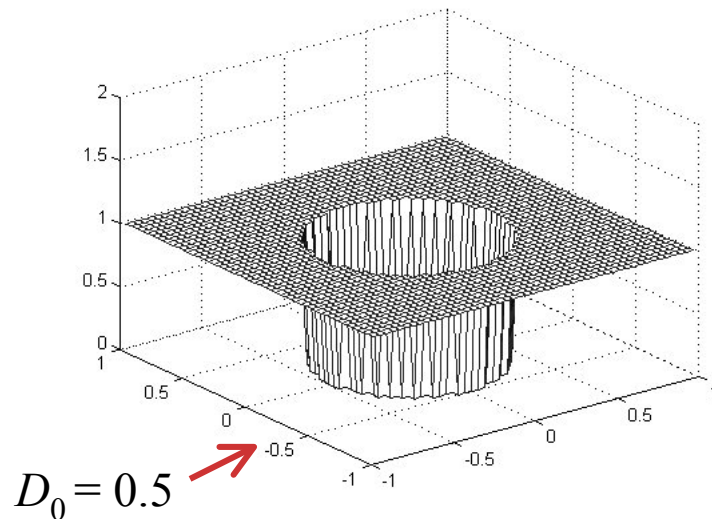
Filtri passa-alto

- ✓ Un **filtro passa-alto ideale** ha la seguente funzione di trasferimento:

$$H(u,v) = \begin{cases} 0 & \text{per } D(u,v) \leq D_0 \\ 1 & \text{per } D(u,v) > D_0 \end{cases}$$

D_0 è una quantità non negativa, e $D(u,v)$ è la distanza del punto (u,v) dall'origine del piano delle frequenze: $D(u,v) = (u^2 + v^2)^{1/2}$

Tutte le frequenze all'interno di un cerchio di raggio D_0 sono completamente attenuate, mentre tutte quelle superiori passano senza attenuazione



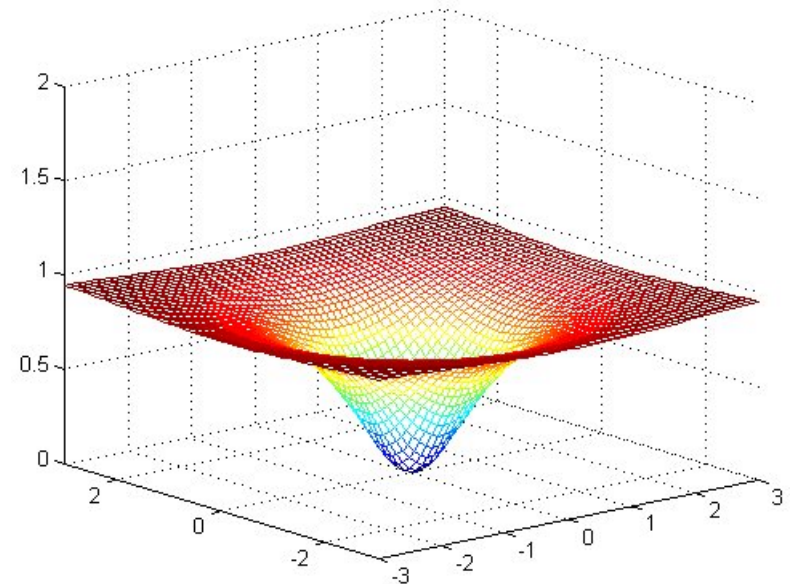
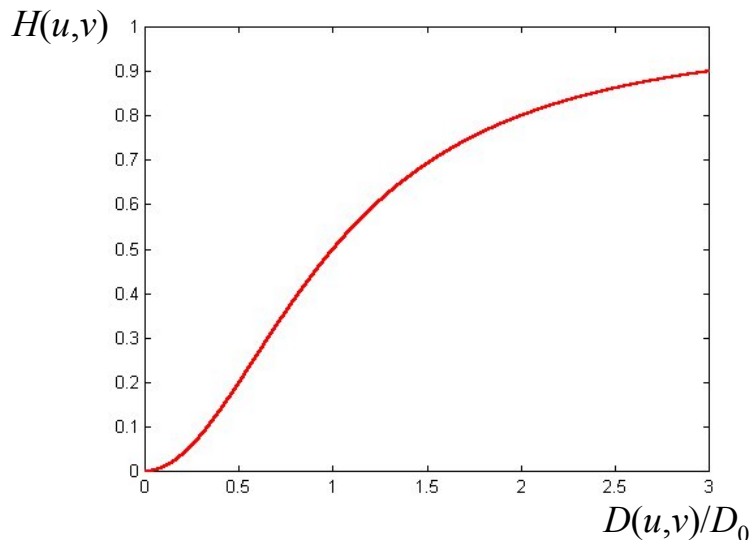


Filtro PA di Butterworth

- ✓ La funzione di trasferimento del **filtro passa-alto di Butterworth** di ordine n e frequenza di taglio D_0 è:

$$H(u, v) = \frac{1}{1 + [D_0/D(u, v)]^{2n}}$$

- ✓ Per esempio, con $n = 1$:



E. Ardizzone

$D_0 = 1$ ↗



Filtro PA di Butterworth

- ✓ Come nel caso PB, si può dare una definizione del filtro che renda luogo delle frequenze di taglio i punti del piano u, v nei quali $H(u, v)$ si riduce a $1/\sqrt{2}$ del valore massimo:

$$H(u, v) = \frac{1}{1 + [\sqrt{2} - 1][D_0/D(u, v)]^{2n}} = \frac{1}{1 + 0.414[D_0/D(u, v)]^{2n}}$$



Filtraggio omomorfo

- ✓ Il modello **illuminazione-riflettenza** $f(x,y)=i(x,y)r(x,y)$ può essere utilizzato, anche se non direttamente, come base di una procedura nel dominio della frequenza in grado di effettuare simultaneamente una compressione della gamma dinamica e un arricchimento del contrasto
- ✓ L'uso diretto del modello non è possibile in quanto la trasformata del prodotto di due funzioni non è separabile, infatti:

$$F \{f(x, y)\} \neq F \{i(x, y)\}F \{r(x, y)\}$$

- ✓ Si definisca tuttavia:

$$z(x, y) = \ln f(x, y) = \ln i(x, y) + \ln r(x, y)$$

- ✓ Quindi:

$$F \{z(x, y)\} = F \{\ln f(x, y)\} = F \{\ln i(x, y)\} + F \{\ln r(x, y)\}$$

- ✓ Ponendo $I(u, v) = F \{\ln i(x, y)\}$ e $R(u, v) = F \{\ln r(x, y)\}$ si può scrivere:

$$Z(u, v) = I(u, v) + R(u, v)$$



Filtraggio omomorfo

- ✓ Filtrando con una funzione $H(u, v)$:

$$S(u, v) = H(u, v)Z(u, v) = H(u, v)I(u, v) + H(u, v)R(u, v)$$

- ✓ Nel dominio spaziale:

$$s(x, y) = \mathcal{F}^{-1} \{S(u, v)\} = \mathcal{F}^{-1} \{H(u, v)I(u, v)\} + \mathcal{F}^{-1} \{H(u, v)R(u, v)\}$$

- ✓ Ponendo

$$i'(x, y) = \mathcal{F}^{-1} \{H(u, v)I(u, v)\} \text{ e } r'(x, y) = \mathcal{F}^{-1} \{H(u, v)R(u, v)\}$$

si ha infine:

$$s(x, y) = i'(x, y) + r'(x, y)$$

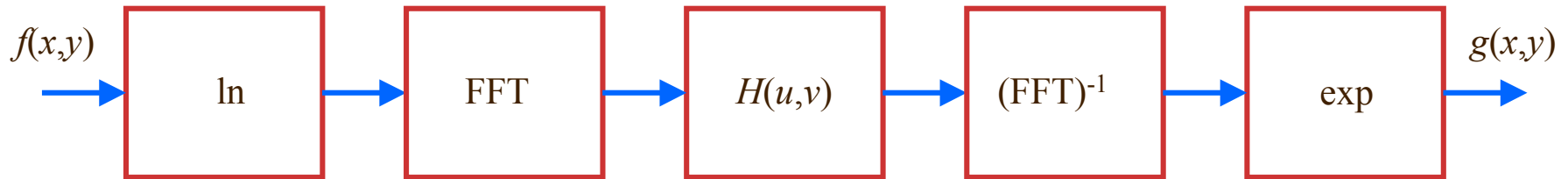
- ✓ Applicando infine l'operazione inversa del logaritmo (che era stato applicato all'immagine iniziale) si ottiene per l'immagine di uscita:

$$g(x, y) = \exp[s(x, y)] = \exp[i'(x, y)]\exp[r'(x, y)] = i_0(x, y)r_0(x, y)$$



Filtraggio omomorfo

- ✓ Pertanto $i_0(x, y) = \exp[i'(x, y)]$ e $r_0(x, y) = \exp[r'(x, y)]$ sono l'illuminanza e la riflettenza dell'immagine di uscita
- ✓ Riassumendo:

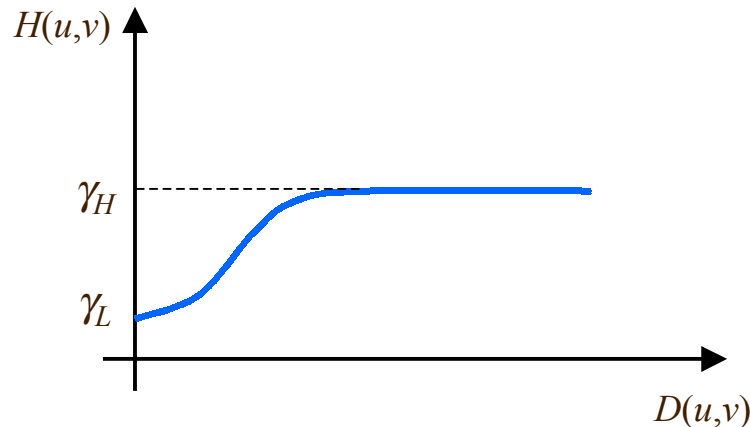


- ✓ Il metodo presentato è basato su un caso speciale di una classe di sistemi, detti **omomorfi**
- ✓ In particolare, in questo caso la separazione delle componenti di illuminazione e riflettenza è effettuata utilizzando il logaritmo, in modo che il filtro possa operare *separatamente* sulle due componenti: l'illuminazione, generalmente caratterizzata da lente variazioni spaziali, e la riflettenza, generalmente caratterizzata da brusche variazioni, come nei contorni degli oggetti



Filtraggio omomorfo

- ✓ Ovviamente l'associazione delle basse frequenze della trasformata del logaritmo alla componente di illuminazione e delle alte frequenze della trasformata del logaritmo alla componente di riflettenza è piuttosto imprecisa, ma consente in questo caso di operare efficacemente
- ✓ Dal punto di vista realizzativo, occorre una $H(u,v)$ in grado di operare in modo diverso sulle componenti di bassa frequenza e su quelle di alta frequenza della trasformata di Fourier dell'immagine, del tipo:



Se $\gamma_L < 1$ e $\gamma_H > 1$, il filtro tende a smorzare il contenuto delle basse frequenze e ad amplificare il contenuto delle alte frequenze



Filtraggio omomorfo

- ✓ Per esempio, agendo sull'immagine di sinistra con un filtro omomorfo, con $\gamma_L = 0.5$ e $\gamma_H = 1.5$, si ottengono i risultati mostrati sulla destra

